Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Épreuve de mathématiques - Groupement B

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2, sauf Traitement des matériaux : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Freinage d'un chariot de fête foraine (12 questions) **Page 3**

2. Probabilités, durée de vie et conformité de produits industriels (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btsmmcm.fr/assets/annales/bts-mmcm/E2 - Mathématiques/2022/BTS MMCM - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

1. Freinage d’un chariot de fête foraine

Un chariot lancé à 20 m·s⁻¹ est freiné, et sa vitesse f(t) est modélisée par une fonction définie sur [0 ; +∞[. L’exercice étudie une équation différentielle, les variations et la limite de f, une distance parcourue, un développement limité et la tangente à la courbe.

Partie A - Résolution d’une équation différentielle

Question 1. a. Résoudre l’équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0.

L’équation est de la forme $y' + ay = 0$, dont les solutions sont $y(t) = ke^{-at}$, avec k constante réelle. Ici, $a = 0,8$. Cette expression est définie et dérivable sur l’intervalle demandé, et sa dérivée vérifie bien l’équation : $y'(t) + 0,8y(t) = 0$. La constante k peut prendre toute valeur réelle.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1. b. On définit g sur [0 ; +∞[par g(t) = 5. Vérifier que g est une solution de l’équation différentielle y' + 0,8y = 4.

La fonction g est constante, donc $g'(t) = 0$. En remplaçant y par g dans le membre de gauche, on obtient $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$. Cette égalité est vérifiée pour tout $t \geq 0$, donc g satisfait bien l’équation différentielle proposée.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $g(t) = 5$ est une solution de $y' + 0,8y = 4$.

Question 1. c. Déduire l’ensemble des solutions de l’équation différentielle y' + 0,8y = 4.

Une solution particulière de l’équation complète est $g(t) = 5$. Les solutions de l’équation homogène associée sont $ke^{-0,8t}$. Toute solution de l’équation complète s’obtient en ajoutant une solution de l’équation homogène à cette solution particulière. On obtient ainsi toutes les solutions sur $[0; +\infty[$, puisque la constante réelle k est arbitraire.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de l’équation différentielle y' + 0,8y = 4 qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

La forme générale trouvée précédemment est $f(t) = 5 + ke^{-0,8t}$. Avec $t = 0$, la condition initiale donne $f(0) = 5 + k = 20$, d’où $k = 20 - 5 = 15$. En remplaçant la constante par cette valeur, on obtient la fonction cherchée. Elle vérifie l’équation différentielle et la condition initiale.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1. a. Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

On a $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Lorsque $t \to +\infty$, $-0,8t \to -\infty$, donc $e^{-0,8t} \to 0$. Le terme $15e^{-0,8t}$ tend alors vers zéro. La constante 5 ne dépend pas de t, donc la limite de la somme est égale à 5.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1. b. Déduire de la limite précédente que la courbe C admet une asymptote et en donner une équation.

Une fonction qui tend vers une limite finie lorsque $t \to +\infty$ admet une asymptote horizontale à cette limite. Comme $f(t) \to 5$, la courbe C se rapproche de la droite horizontale d'ordonnée 5. L'équation de l'asymptote est donc $y = 5$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. À partir de l'expression fournie pour f'(t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle est positive : $e^{-0,8t} > 0$. Ainsi, $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$, donc f est strictement décroissante. Elle vaut 20 en 0 et tend vers 5 à l'infini.

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	20	$\searrow 5$

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. Le système de freinage permet-il au chariot de s'arrêter ?

Le chariot s'arrêterait si sa vitesse atteignait zéro. Or f décroît à partir de 20, mais sa limite est 5. Pour tout temps fini, $e^{-0,8t} > 0$, donc $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$. La vitesse ne s'annule donc jamais dans ce modèle, même si elle se rapproche de 5 lorsque le temps augmente.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : la vitesse tend vers $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, sans atteindre 0.

Question 4. a. On définit F(t) = −18,75e$^{-0,8t}$ + 5t. Vérifier que F est une primitive de f sur [0 ; +∞[.

En dérivant $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$, on obtient $F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5$. Cette expression est exactement celle de $f(t)$. Ainsi, $F' = f$ sur $[0; +\infty[$, ce qui vérifie que F est une primitive de f.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = f(t)$: F est une primitive de f.

Question 4. b. La distance d parcourue entre les instants t₀ et t₁ est donnée par d = ∫ de t₀ à t₁ f(t)dt. Calculer la valeur exacte de la distance parcourue entre t₀ = 0 et t₁ = 1, puis donner une valeur arrondie au centimètre.

La distance parcourue entre 0 et 1 est $F(1) - F(0)$. Avec la primitive donnée, cela donne $(-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ mètres. L'évaluation numérique donne environ 15,3251 m. Arrondie au centimètre, la distance est de 15,33 m.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}\ \mathrm{m} \approx 15,33\ \mathrm{m}$.

Partie C - Étude locale

Question 1. Question à choix multiples à réponse unique : recopier la proposition donnant le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Aucune justification n'est demandée.

Le logiciel donne la partie régulière du développement limité : $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. À l'ordre 2, le reste doit être un terme en $t^2\varepsilon(t)$, où $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. Il faut donc retenir la proposition qui conserve les trois termes et présente le reste sous cette forme.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Proposition 3 : $20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = f(0) + f'(0)t$. La condition initiale donne $f(0) = 20$. À partir de $f'(t) = -12e^{-0,8t}$, on trouve $f'(0) = -12$. En remplaçant ces deux valeurs dans l'équation de la tangente, on obtient son expression.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y = 20 - 12t$.

2. Probabilités, durée de vie et conformité de produits industriels

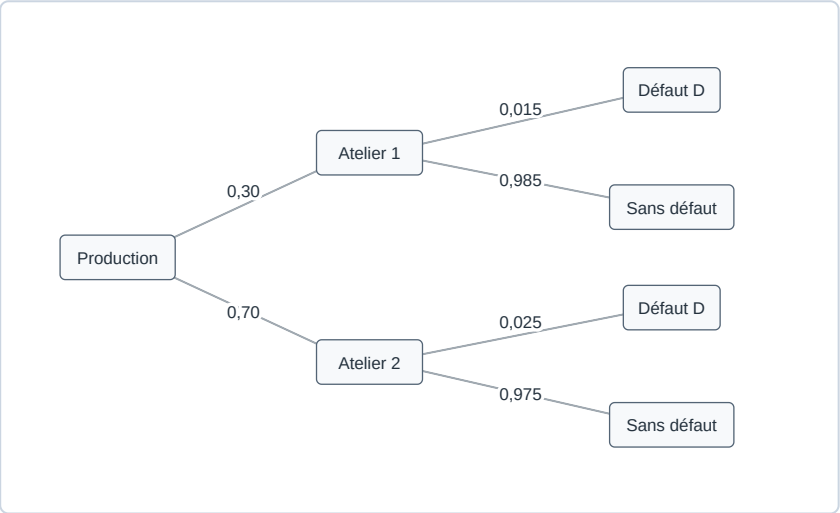
Une usine produit des tubes fluorescents dans deux ateliers, et des tests servent à étudier la probabilité de défaut ainsi que la durée de bon fonctionnement des tubes. L'exercice porte aussi sur l'estimation de la proportion de rivets conformes à partir d'un échantillon de 1 000 rivets.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. Réaliser un arbre pondéré décrivant la situation : les proportions de production des deux ateliers et, pour chacun, les probabilités qu'un tube présente ou ne présente pas de défaut.

On branche d'abord les deux ateliers selon leurs parts de production. Depuis chaque atelier, on indique la probabilité conditionnelle de défaut, puis son complément pour « sans défaut ». Chaque paire de probabilités conditionnelles totalise 1.

Arbre pondéré des ateliers et des défauts



Les probabilités conditionnelles des deux branches issues de chaque atelier totalisent 1.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Atelier 1 : 0,30 ; atelier 2 : 0,70. Taux de défaut : 0,015 et 0,025 ; sans défaut : 0,985 et 0,975.

Question 2. Calculer la probabilité P(A₁ ∩ D), où A₁ désigne l'événement « le tube provient de l'atelier 1 » et D l'événement « le tube présente un défaut ».

La probabilité qu'un tube provienne de l'atelier 1 et soit défectueux est le produit de la proportion issue de cet atelier par son taux conditionnel de défaut. D'après les données de la page 5 du sujet : $P(A_1 \cap D) = P(A_1)P(D \mid A_1) = 0{,}30 \times 0{,}015 = 0{,}0045$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A_1 \cap D) = 0{,}0045$, soit 0,45 %.

Question 3. **Montrer que P(D) = 0,0195, valeur indiquée dans l'énoncé.**

Les deux ateliers forment une partition de la production. Par la formule des probabilités totales, $P(D) = 0{,}30 \times 0{,}015 + 0{,}70 \times 0{,}025 = 0{,}0045 + 0{,}0175 = 0{,}022$. Sur la page originale, la valeur imprimée 0,0195 est corrigée à la main en 0,0220, ce qui concorde avec le calcul.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(D) = 0{,}022$, soit 2,2 % ; la valeur corrigée sur le sujet est 0,0220.

Question 4. **Sachant que le tube prélevé ne présente pas de défaut, déterminer la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2.**

On cherche la probabilité conditionnelle $P(A_2 \mid \overline{D})$. La probabilité d'un tube issu de l'atelier 2 et sans défaut est $0{,}70 \times 0{,}975$. D'après la question précédente, $P(\overline{D}) = 1 - 0{,}022 = 0{,}978$. Ainsi, $P(A_2 \mid \overline{D}) = \dfrac{0{,}70 \times 0{,}975}{0{,}978} \approx 0{,}698$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(A_2 \mid \overline{D}) \approx 0{,}698$, soit environ 69,8 %.

Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

Question 1. **La durée de bon fonctionnement T suit une loi exponentielle de paramètre λ = 0,001. Déterminer son espérance E(T) et interpréter le résultat dans le contexte.**

La page originale indique $\lambda = 0{,}0001$ par heure. Pour une loi exponentielle, l'espérance vaut $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$, donc $E(T) = \dfrac{1}{0{,}0001} = 10\,000$ heures. Il s'agit de la durée moyenne théorique de bon fonctionnement, et non d'une durée garantie pour chaque tube.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(T) = 10\,000$ heures : c'est la durée moyenne théorique de bon fonctionnement d'un tube.

Question 2. **Calculer, avec un arrondi à 10^{-2} près, la probabilité que la durée de bon fonctionnement du tube prélevé soit inférieure à 8 000 heures.**

La formule donnée est $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Comme la loi est continue, $P(T < 8\,000) = P(T \leq 8\,000)$. Avec le paramètre indiqué sur la page originale, $1 - e^{-0{,}0001 \times 8\,000} = 1 - e^{-0{,}8} \approx 0{,}5507$. L'arrondi au centième est 0,55.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T < 8\,000) \approx 0{,}55$.

Question 3. Calculer, avec un arrondi à 10^{-2} près, la probabilité que la durée de bon fonctionnement du tube prélevé soit supérieure à 10 000 heures.

La probabilité de dépasser 10 000 heures est le complément de celle de ne pas dépasser cette durée : $P(T > 10\,000) = e^{-\lambda \times 10\,000}$. Avec $\lambda = 0{,}0001$, on obtient $e^{-1} \approx 0{,}3679$, soit 0,37 après arrondi au centième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T > 10\,000) \approx 0{,}37$.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. Sur les 1 000 rivets prélevés, 975 sont conformes. Donner une estimation ponctuelle de la proportion inconnue p de rivets conformes dans la production.

L'estimation ponctuelle de la proportion de rivets conformes est la fréquence observée dans l'échantillon. Sur 1 000 rivets, 975 sont conformes, donc $f = \dfrac{975}{1\,000} = 0{,}975$. Cette fréquence sert d'estimation de la proportion inconnue dans la production.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Estimation ponctuelle : $f = 0{,}975$, soit 97,5 %.

Question 2. À l'aide de la formule fournie, déterminer un intervalle de confiance centré sur la fréquence observée pour la proportion p, au niveau de confiance de 95 %. Arrondir les bornes à 10^{-3} près.

La formule fournie donne, avec $f = 0{,}975$ et $n = 1\,000$, l'intervalle $\left[f - 1{,}96\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}} \ ; \ f + 1{,}96\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}} \right]$.
La marge vaut environ 0,009677 ; les bornes non arrondies sont 0,965323 et 0,984677. On arrondit chacune au millième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Intervalle de confiance à 95 % : $[0{,}965 \ ; \ 0{,}985]$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2022, porte le code 22MATGRB1 et dure deux heures. Le coefficient est 2, sauf en Traitement des matériaux où il est 3. Les deux exercices étudient le freinage d'un chariot et le contrôle de produits industriels, en mobilisant équations différentielles, fonctions, probabilités, loi exponentielle et estimation par intervalle de confiance.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Les solutions de $y' + ay = 0$ sont de la forme $y(t) = ke^{-at}$; une solution particulière donne l'ensemble des solutions de l'équation complète.
- Si $f(t)$ tend vers L lorsque t tend vers $+\infty$, la courbe représentative de f admet l'asymptote horizontale $y = L$.
- Pour T de loi exponentielle de paramètre λ, $E(T) = 1/\lambda$, $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$ et $P(T > t) = e^{-\lambda t}$.
- L'intervalle de confiance fourni est $[f - 1{,}96\sqrt{(f(1-f)/n)} ; f + 1{,}96\sqrt{(f(1-f)/n)}]$, où f est la fréquence observée.

Points de vigilance & attentes du jury

- Vérifier une solution particulière par substitution, puis appliquer la condition initiale pour déterminer la constante.
- Pour le tableau de variation, étudier le signe de f' et faire apparaître la valeur initiale ainsi que la limite utile.
- Dans l'arbre, distinguer les probabilités conditionnelles des probabilités d'intersection et contrôler la cohérence des données.
- Conserver les valeurs exactes dans les calculs et appliquer les arrondis et unités demandés dans chaque question.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer la constante d'une solution d'équation différentielle avec une condition initiale ?

Écrivez la solution générale, puis remplacez la variable et la fonction par les valeurs de la condition initiale. Résolvez l'équation obtenue pour déterminer la constante.

Q : Comment calculer une probabilité de durée dans une loi exponentielle ?

Pour une durée inférieure ou égale à t, utilisez $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Pour une durée supérieure à t, utilisez $P(T > t) = e^{-\lambda t}$, qui est la probabilité complémentaire.

Q : Comment répartir son temps pendant cette épreuve de deux heures ?

Le sujet comprend deux exercices de 10 points avec des parties pouvant être traitées indépendamment. Répartissez le temps entre les exercices, avancez sur les questions accessibles et gardez quelques minutes pour vérifier calculs, réponses et arrondis.

Q : Quels critères de présentation faut-il respecter pour les réponses numériques ?

Le sujet demande des calculs lisibles, les arrondis précisés dans certaines questions et une interprétation de l'espérance. Gardez les valeurs exactes dans les étapes intermédiaires et ajoutez les unités lorsqu'un résultat représente une durée ou une distance.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsmmcm.fr/assets/annales/bts-mmcm/E2 - Mathématiques/2022/BTS MMCM - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf
Ressources BTS Maintenance des Matériels de Construction et de Manutention : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.