Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Freinage d’un chariot de fête foraine (12 questions) **Page 3**

2. Transformées de Laplace d’un système électrique (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu’il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsmmcm.fr/assets/annales/bts-mmcm/E2 - Mathématiques/2022/BTS MMCM - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

1. Freinage d’un chariot de fête foraine

Un chariot lancé à 20 m/s est ralenti par un système de freinage et sa vitesse est modélisée par une fonction du temps. L’exercice étudie cette fonction, la distance parcourue et son comportement local au voisinage de l’instant initial.

Partie A - Résolution d’une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l’équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0 sur l’intervalle considéré.

La formule fournie donne, pour une équation homogène de la forme $y' + ay = 0$, les solutions $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle. Ici, le coefficient est $a = 0,8$. On remplace donc a par sa valeur dans la formule. L’intervalle d’étude est $[0; +\infty[$, et la constante k peut prendre toute valeur réelle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. Vérifier que la fonction g définie par g(t) = 5 est une solution de l’équation différentielle y' + 0,8y = 4.

1. La fonction g est constante, donc $g'(t) = 0$.
2. En substituant dans le membre de gauche, on obtient $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$.

Cette égalité est vérifiée pour tout t de l’intervalle considéré. La fonction proposée satisfait donc bien l’équation différentielle (E).

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est solution de (E).

Question 1.c. Déduire des résultats précédents l’ensemble des solutions de l’équation différentielle y' + 0,8y = 4.

On connaît une solution particulière de (E), la fonction constante $g(t) = 5$. Les solutions de l’équation homogène associée $y' + 0,8y = 0$ sont de la forme $ke^{-0,8t}$. Toute solution de l’équation complète s’obtient en ajoutant une solution de l’équation homogène à la solution particulière. La constante k est réelle et arbitraire.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de l’équation différentielle y' + 0,8y = 4 qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

1. D’après la solution générale de (E), on écrit $f(t) = 5 + ke^{-0,8t}$.

2. À $t = 0$, la condition initiale donne $f(0) = 5 + k = 20$, car $e^0 = 1$. Ainsi, $k = 20 - 5 = 15$.

On remplace cette constante dans la solution générale pour obtenir la fonction vitesse du chariot.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

La fonction est définie par $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Quand t tend vers $+\infty$, l'exposant $-0,8t$ tend vers $-\infty$. L'exponentielle $e^{-0,8t}$ tend donc vers 0. En multipliant cette limite par 15 puis en ajoutant 5, on obtient la limite de $f(t)$. Ainsi, la vitesse se rapproche de 5 lorsque le temps augmente indéfiniment.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1.b. Déduire de la limite précédente que la courbe représentative C admet une asymptote et en donner une équation.

Une fonction qui tend vers une valeur finie L lorsque son argument tend vers $+\infty$ possède une asymptote horizontale d'équation $y = L$. Ici, la limite de $f(t)$ est 5. On en déduit que les points de la courbe se rapprochent de la droite horizontale correspondante lorsque t devient très grand.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. À l'aide de l'expression donnée pour f'(t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

t	**0**	$+\infty$
Signe de $f'(t) = -12e^{-0,8t}$	$-$	
Variation de f	20	$\searrow$ 5

L'exponentielle est strictement positive, donc $f'(t) < 0$ pour tout $t \geq 0$. La fonction est strictement décroissante. Elle part de $f(0) = 20$ et tend vers 5, sans atteindre cette limite.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f décroît strictement de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. **Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.**

Pour tout temps fini $t \geq 0$, l'exponentielle $e^{-0,8t}$ est strictement positive. Ainsi, $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$ est toujours strictement supérieure à 5. La vitesse décroît et se rapproche de 5 m/s, mais ne tend pas vers 0. Selon le modèle donné, le chariot ralentit sans jamais s'arrêter.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non, le chariot ne s'arrête pas : sa vitesse tend vers $5\ \mathrm{m/s}$.

Question 4.a. **Vérifier que F(t) = -18,75e^(-0,8t) + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.**

1. La dérivée de $e^{-0,8t}$ est $-0,8e^{-0,8t}$. Par conséquent, $\left(-18,75e^{-0,8t}\right)' = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} = 15e^{-0,8t}$.
2. La dérivée de $5t$ est 5.

On obtient donc $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$, ce qui vérifie que F est une primitive de f.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = f(t)$: F est une primitive de f.

Question 4.b. **Calculer la valeur exacte de la distance parcourue par le chariot entre t = 0 et t = 1 à l'aide de l'intégrale de sa vitesse, puis donner une valeur arrondie au centimètre.**

La distance parcourue entre 0 et 1 seconde est l'intégrale de la vitesse sur cet intervalle. Avec la primitive donnée, $d = F(1) - F(0)$. Ainsi, $d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ mètres. L'évaluation numérique, arrondie au centimètre comme demandé, donne la distance parcourue.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}\ \mathrm{m} \approx 15,33\ \mathrm{m}$.

Partie C - Étude locale

Question 1. **Choisir l'unique expression correcte parmi les propositions pour le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Recopier la réponse choisie ; aucune justification n'est demandée.**

Le logiciel affiche la partie régulière $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. Parmi les propositions du sujet, il faut retenir celle qui conserve ces trois termes et ajoute un reste négligeable devant t^2. Ce reste s'écrit $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ quand $t \to 0$. La proposition contenant seulement $\varepsilon(t)$ comme reste ne convient pas ici.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = f(0) + f'(0)t$. La valeur initiale est $f(0) = 20$, et l'expression donnée de la dérivée donne $f'(0) = -12e^{0} = -12$. La tangente passe donc par le point de coordonnées $(0; 20)$ et a pour coefficient directeur -12.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $T : y = 20 - 12t$.

2. Transformées de Laplace d’un système électrique

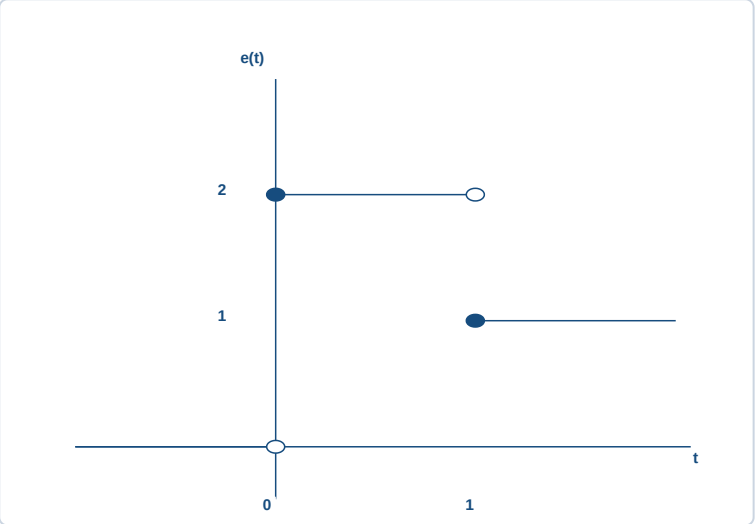
Un système électrique causal reçoit un signal d’entrée défini à l’aide de la fonction échelon unité et possède une fonction de transfert donnée. L’exercice mobilise les transformées de Laplace pour déterminer puis représenter le signal de sortie.

Partie A - Signal d’entrée

Question 1. Tracer, sur le document-réponse à rendre avec la copie, la courbe représentative de la fonction e(t) = 2U(t) - U(t - 1).

Comme $U(t) = 0$ pour $t < 0$, le signal est nul avant l’instant 0. À partir de 0, $2U(t) = 2$, et le signal reste égal à 2 jusqu’à l’instant 1 exclu. En $t = 1$, le terme $U(t - 1)$ vaut déjà 1 : le signal prend donc la valeur 1 et la conserve ensuite. Le tracé comporte des segments horizontaux et des sauts, sans relier verticalement les niveaux.

Signal d’entrée e(t)



> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $e(t) = 0$ si $t < 0$, $e(t) = 2$ si $0 \leq t < 1$, et $e(t) = 1$ si $t \geq 1$.

Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d’entrée e(t).

La transformée de Laplace est linéaire. Le formulaire donne $\mathcal{L}(U(t)) = 1/p$ et $\mathcal{L}(U(t-1)) = e^{-p}/p$, car le second échelon est retardé d’une unité. En appliquant les coefficients de l’expression du signal d’entrée, on obtient :

$$E(p) = 2\frac{1}{p} - \frac{e^{-p}}{p}.$$

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La transformée du signal d’entrée est $E(p) = \dfrac{2 - e^{-p}}{p}$.

Partie B - Signal de sortie

Question 1. Démontrer que S(p) = 2/[p(p + 1)] - [1/[p(p + 1)]]e^(-p).

La fonction de transfert donnée est $H(p) = 1/(p+1)$, et la transformée d'entrée est $E(p) = (2 - e^{-p})/p$. La relation entrée-sortie impose $S(p) = H(p)E(p)$. En multipliant puis en séparant les deux termes du numérateur, on retrouve l'expression demandée :

$$S(p) = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}.$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $S(p) = \dfrac{2}{p(p+1)} - \dfrac{e^{-p}}{p(p+1)}.$

Question 2. Vérifier que 1/[p(p + 1)] = 1/p - 1/(p + 1).

On met les deux fractions du membre de droite au même dénominateur. Les numérateurs se soustraient dans l'ordre indiqué :

1. $\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1} = \dfrac{(p+1) - p}{p(p+1)}$.
2. Comme $(p+1) - p = 1$, le résultat est bien $\dfrac{1}{p(p+1)}$, pour les valeurs de p où les fractions sont définies.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Identité vérifiée : $\dfrac{1}{p(p+1)} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1}$.

Question 3. Donner les transformées inverses de Laplace de 1/p, de 1/(p + 1), de (1/p)e^(-p) et de [1/(p + 1)]e^(-p), en utilisant le formulaire.

Les deux premières inverses se lisent directement dans le formulaire. Pour les deux dernières, on applique la propriété de retard : la multiplication par e^{-p} transforme $f(t)U(t)$ en $f(t-1)U(t-1)$. Les quatre résultats, dans l'ordre demandé, sont :

Transformée	Inverse de Laplace
$1/p$	$U(t)$
$1/(p+1)$	$e^{-t}U(t)$
e^{-p}/p	$U(t-1)$
$e^{-p}/(p+1)$	$e^{-(t-1)}U(t-1)$

✓ RÉPONSE À RETENIR

Dans l'ordre : $U(t)$, $e^{-t}U(t)$, $U(t-1)$, $e^{-(t-1)}U(t-1)$.

Question 4. Déduire l'expression du signal de sortie s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.

Avec la décomposition précédente, on écrit $S(p) = 2(1/p - 1/(p+1)) - e^{-p}(1/p - 1/(p+1))$. Pour $0 \leq t < 1$, les fonctions retardées comportent le facteur $U(t-1) = 0$ et ne contribuent donc pas. L'inverse des deux termes restants est $2(U(t) - e^{-t}U(t))$. Sur l'intervalle considéré, cela se simplifie en :

✓ RÉPONSE À RETENIR

Sur $[0;1[$, le signal de sortie est $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

Question 5.a. À partir de l'expression de s(t) admise sur [1 ; +∞[, calculer s(1), d'abord sous forme exacte puis avec une valeur approchée au dixième.

L'énoncé donne, pour $t \geq 1$, $s(t) = (e-2)e^{-t} + 1$. On remplace t par 1, puis on simplifie en utilisant $e\,e^{-1} = 1$:

1. $s(1) = (e-2)e^{-1} + 1$.
2. Donc $s(1) = 2 - 2/e \approx 1{,}264$, soit $1{,}3$ au dixième.

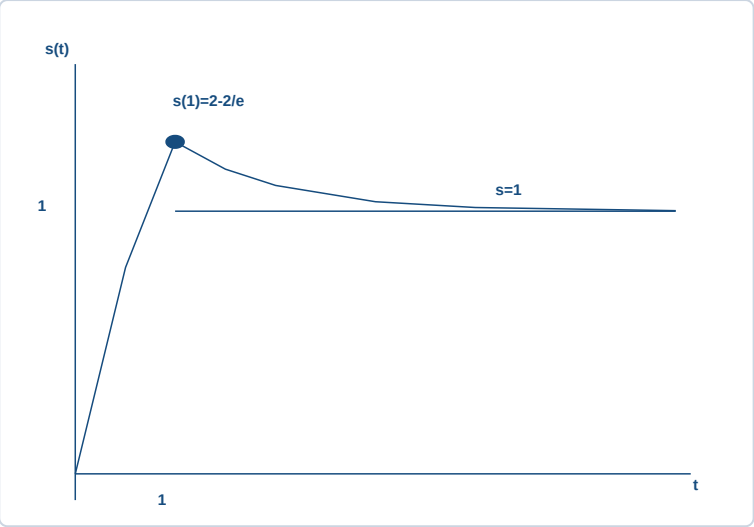
✓ RÉPONSE À RETENIR

Valeur exacte : $s(1) = 2 - \dfrac{2}{e}$. Arrondie au dixième : $1{,}3$.

Question 5.b. Compléter, sur le document-réponse à rendre avec la copie, la courbe représentative de la fonction s.

Sur $[0;1[$, la courbe suit $2(1 - e^{-t})$ et croît de 0 à $s(1) = 2 - 2/e$. Pour $t \geq 1$, elle suit $(e-2)e^{-t} + 1$: elle décroît vers 1. Les deux expressions donnent la même valeur en $t = 1$, donc la courbe est continue à cet instant. Le tracé ci-dessous indique aussi l'asymptote horizontale.

Courbe représentative de s(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

La courbe croît de 0 à $s(1) = 2 - 2/e \approx 1{,}3$, puis décroît vers l'asymptote $s = 1$.

Question 5.c. Donner la limite de la fonction s(t) en +∞.

Pour tout $t \geq 1$, l'expression admise est $s(t) = (e-2)e^{-t} + 1$. Lorsque t tend vers $+\infty$, le facteur e^{-t} tend vers zéro, tandis que le facteur $e - 2$ reste constant. Le terme exponentiel disparaît donc à la limite et il ne reste que le terme constant, ce qui donne :

$$\lim_{t \to +\infty} s(t) = 1.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

La limite du signal de sortie lorsque t tend vers $+\infty$ est égale à 1.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, session 2022, code 22MATGRB2, d'une durée de 2 heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Les deux exercices étudient le freinage d'un chariot et un système électrique, avec des questions sur les équations différentielles, l'étude de fonctions, l'intégration et les transformées de Laplace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = b, une solution générale s'obtient en ajoutant une solution particulière aux solutions de l'équation homogène.
- Si f(t) tend vers L lorsque t tend vers +∞, la courbe de f admet l'asymptote horizontale d'équation y = L.
- La distance parcourue entre t0 et t1 est l'intégrale de la vitesse : d = ∫ de t0 à t1 f(t) dt.
- Un retard d'une unité dans le temps se traduit en transformée de Laplace par un facteur e^(-p).

Points de vigilance & attentes du jury

- Utiliser la condition initiale f(0) = 20 pour déterminer la constante de la solution de l'équation différentielle.
- Interpréter la limite de la vitesse : elle vaut 5 m/s, donc le chariot ne s'arrête pas.
- Pour la distance, évaluer la primitive aux deux bornes et respecter l'arrondi au centimètre demandé.
- Pour les transformées inverses, appliquer le décalage temporel et distinguer les intervalles avant et après t = 1.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle du modèle de freinage ?

Résolvez d'abord l'équation homogène y' + 0,8y = 0, puis ajoutez une solution particulière constante de l'équation complète. Utilisez ensuite f(0) = 20 pour déterminer la constante d'intégration.

Q : Comment traiter le facteur e^(-p) dans une transformée inverse de Laplace ?

Le facteur e^(-p) correspond à un retard d'une unité. La transformée inverse est le signal translaté, multiplié par U(t - 1) : il est nul avant t = 1, puis prend sa forme décalée.

Q : Combien de temps dure l'épreuve et comment les points sont-ils répartis ?

L'épreuve dure 2 heures et comporte deux exercices de 10 points chacun, soit 20 points au total. Les calculatrices avec mode examen actif et les calculatrices sans mémoire de type collège sont autorisées.

Q : Que faut-il soigner pour obtenir les points aux calculs et aux représentations ?

Présentez les étapes utiles, respectez les unités et les arrondis demandés, et justifiez les variations ou les limites. Pour les tracés, respectez les intervalles étudiés ainsi que les valeurs du signal aux points de raccordement.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsmmcm.fr/assets/annales/bts-mmcm/E2 - Mathématiques/2022/BTS MMCM - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS Maintenance des Matériels de Construction et de Manutention : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.