Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22-MATGRD1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Analyses de biologie médicale : 1 ; Bio analyses et contrôles : 2 ; Biotechnologies : 1 ; Europlastics et composites : 1,5 ; Bioqualité : 2**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Modélisation de l'évolution du nombre de personnes équipées d'un implant médical (13 questions) **Page 3**

2. Défauts d'approvisionnement, pannes et qualité de l'embouteillement (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btsmmcm.fr/assets/annales/bts-mmcm/E2 - Mathématiques/2022/BTS MMCM - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 3-Sujet.pdf

1. Modélisation de l'évolution du nombre de personnes équipées d'un implant médical

Dans un pays de 60 millions d'habitants, des données de 2013 à 2021 décrivent l'évolution du nombre de personnes équipées d'un implant médical. Deux modèles sont étudiés : un ajustement exponentiel à partir de données transformées et une fonction obtenue par résolution d'une équation différentielle.

Partie A

Question 1. Compléter le tableau de l'annexe à rendre avec la copie en calculant les valeurs obtenues par le changement de variable y = ln(N - 30). Arrondir les valeurs au millième.

Pour chaque valeur du tableau, on applique le changement de variable $y = \ln(N - 30)$, puis on arrondit au millième.

Rang k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	3,268	3,336	3,418	3,497	3,578	3,656	3,738	3,818	3,898

✓ RÉPONSE À RETENIR

Valeurs de y : 3,268 ; 3,336 ; 3,418 ; 3,497 ; 3,578 ; 3,656 ; 3,738 ; 3,818 ; 3,898.

Question 2.a. À l'aide de la calculatrice, déterminer, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite d'ajustement du nuage de points Mᵢ(kᵢ ; yᵢ), sous la forme y = ak + b. Arrondir a et b au centième.

La régression linéaire des points $(k_i ; y_i)$, calculée par la méthode des moindres carrés, donne après arrondi au centième $a = 0,08$ et $b = 3,26$. La droite d'ajustement est donc $y = 0,08k + 3,26$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$y = 0,08k + 3,26$.

Question 2.b. À partir de l'équation de la droite d'ajustement, déduire que le nombre de personnes équipées de l'implant, exprimé en milliers et en fonction du rang k, peut être modélisé par N(k) = 30 + 26,05e^(0,08k).

Comme $y = \ln(N - 30)$, la droite ajustée donne $N - 30 = e^{0,08k+3,26} = e^{3,26}e^{0,08k}$. Or $e^{3,26} \approx 26,05$. Ainsi, le modèle obtenu exprime bien N en milliers.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$N(k) = 30 + 26,05e^{0,08k}$, en milliers.

Question 3.a. **En utilisant le modèle de la partie A, déterminer au millier près le nombre de personnes qui devraient être équipées de l'implant en 2026.**

Le rang de 2026 est $k = 2026 - 2013 = 13$. Le modèle donne $N(13) = 30 + 26,05e^{0,08\times 13} \approx 103,7$ milliers, soit environ 104 milliers au millier près.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> En 2026 : environ 104 000 personnes.

Question 3.b. **En supposant que le nombre d'habitants du pays reste stable sur le long terme, dire si le modèle étudié reste valide à long terme et justifier la réponse.**

Lorsque k tend vers $+\infty$, $e^{0,08k}$ tend vers $+\infty$, donc le modèle prévoit un nombre de personnes équipées sans limite. Il finirait par dépasser les 60 millions d'habitants du pays.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : à long terme, le modèle dépasse la population totale de 60 millions.

Partie B

Question 1.a. **Résoudre sur [0 ; +∞[l'équation différentielle homogène (E₀) : y' + 0,05y = 0.**

L'équation homogène s'écrit $y' = -0,05y$. Ses solutions sur $[0;+\infty[$ sont les fonctions exponentielles de taux $-0,05$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0,05t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. **Déterminer une solution constante de l'équation différentielle (E) : y' + 0,05y = 0,05.**

Pour une solution constante $y = c$, on a $y' = 0$. L'équation donne $0,05c = 0,05$, donc $c = 1$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Une solution constante est $y(t) = 1$.

Question 1.c. **Résoudre sur [0 ; +∞[l'équation différentielle (E) : y' + 0,05y = 0,05.**

Une solution particulière de (E) est la solution constante 1. En lui ajoutant les solutions de l'équation homogène, on obtient toutes les solutions de (E).

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 1 + Ce^{-0{,}05t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 1.d. **Sachant que g(0) = 8, en déduire une expression de la fonction g sur [0 ; +∞[.**

Dans la solution générale, la condition $g(0) = 8$ donne $1 + C = 8$, donc $C = 7$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 1 + 7e^{-0{,}05t}$.

Question 2. **Avec le modèle f(t) = 450/(1 + 7e^(-0,05t)), où t est le nombre d'années depuis 2013 et f(t) est exprimée en milliers, déterminer au millier près le nombre de personnes équipées de l'implant en 2026.**

En 2026, $t = 2026 - 2013 = 13$. Ainsi, $f(13) = \dfrac{450}{1 + 7e^{-0{,}05 \times 13}} \approx 96{,}7$ milliers.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> En 2026 : environ 97 000 personnes.

Question 3. **Déterminer la limite de f en +∞ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.**

Lorsque $t \to +\infty$, $e^{-0{,}05t} \to 0$. Le dénominateur tend vers 1, donc $f(t) \to 450$, en milliers.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Le modèle prévoit une stabilisation à 450 000 personnes.

Question 4. **À partir de l'expression donnée de f'(t), déduire le sens de variation de f sur [0 ; +∞[et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.**

L'expression donnée est $f'(t) = \dfrac{315e^{-0{,}05t}}{2(1 + 7e^{-0{,}05t})^2}$. Pour tout $t \geq 0$, son numérateur et son dénominateur sont positifs. Donc $f'(t) > 0$ sur l'intervalle considéré.

✓ RÉPONSE À RETENIR

f est strictement croissante : le nombre de personnes équipées augmente selon ce modèle.

Question 5. Déterminer à partir de quelle année le nombre de personnes équipées de l'implant dépassera 120 000, soit 120 milliers, et expliquer la méthode employée.

Résoudre $f(t) > 120$ donne $e^{-0{,}05t} < \frac{11}{28}$, soit $t > 20\ln\left(\frac{28}{11}\right) \approx 18,69$. Le seuil est donc franchi après 18,69 ans depuis 2013. Aux rangs annuels entiers, $f(18) < 120$ et $f(19) > 120$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Le seuil est franchi au cours de 2031 ; la première année entière modélisée au-dessus du seuil est 2032.

2. Défauts d’approvisionnement, pannes et qualité de l’embouteillement

Dans une usine, une machine à embouteiller est alimentée par un réservoir d’eau et une file de bouteilles vides. Les questions portent sur les probabilités de défaut d’approvisionnement, la modélisation du nombre de jours de panne sur 200 jours et un test statistique du volume d’eau versé dans les bouteilles.

Partie A - Défaut d’approvisionnement

Question 1. Associer chacune des quatre phrases du tableau de gauche à l’information correspondante du tableau de droite : probabilité que la file ne se vide pas, événement où la file se vide mais pas le réservoir, probabilité que les deux soient vides au moins une fois, et probabilité d’un défaut d’approvisionnement. Écrire le numéro de la phrase et la lettre correspondante, sans justification.

La file ne se vide pas avec la probabilité 0,97 ; la file se vide sans que le réservoir soit vide correspond à l’événement indiqué en C. L’indépendance donne 0,0006 pour les deux événements réunis. La probabilité d’un défaut vaut 0,0494, soit 0,049 dans les choix proposés.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> 1-E ; 2-C ; 3-F ; 4-D.

Partie B - Pannes de la machine à embouteiller

Question 1. Pour une période de 200 jours consécutifs, avec une probabilité de panne de 0,025 chaque jour et des jours de panne indépendants, donner sans justification la loi de probabilité de X, nombre de jours de panne, et préciser ses paramètres.

Pour chaque jour, l’apparition d’une panne est une épreuve de Bernoulli de probabilité 0,025. Les jours étant indépendants et leur nombre fixé à 200, le nombre de jours avec panne suit une loi binomiale. Son premier paramètre est le nombre d’épreuves et son second est la probabilité de panne à chaque épreuve.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $X \sim \mathcal{B}(200\,;\,0{,}025)$.

Question 2.a. Sachant que la loi de X peut être approchée par une loi de Poisson de paramètre λ, justifier que λ = 5.

Pour approcher une loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$ par une loi de Poisson, on prend le paramètre $\lambda = np$. Ici, il y a 200 jours et la probabilité quotidienne de panne est 0,025. Ainsi, $\lambda = 200 \times 0{,}025 = 5$.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $\lambda = 5$.

Question 2.b. **Pour une variable aléatoire Y suivant la loi de Poisson de paramètre 5, donner la valeur de P(Y ≤ 10), arrondie à 10^{-3}.**

Pour une loi de Poisson de paramètre 5, on additionne les probabilités correspondant aux valeurs entières de 0 à 10 : $P(Y \leq 10) = \sum_{k=0}^{10} \frac{5^k e^{-5}}{k!}$. Cette somme vaut environ 0,986305 ; l'arrondi demandé au millième est donc 0,986.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(Y \leq 10) \approx 0{,}986$.

Question 2.c. **À l'aide de la formule de la loi de Poisson donnée dans le sujet, dire si la conjecture P(Y = 15) = 0 est vraie ou fausse et justifier.**

La formule de Poisson donne, pour $k = 15$, $P(Y = 15) = \frac{5^{15} e^{-5}}{15!}$. Cette expression est strictement positive, même si sa valeur est très petite et difficile à distinguer de zéro sur le graphique.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La conjecture est fausse : $P(Y = 15) \approx 0{,}000157 > 0$.

Partie C - Qualité de l'embouteillement

Question 1. **À partir du tableau donnant les volumes d'eau et les nombres de bouteilles correspondants, déterminer à la calculatrice la moyenne et l'écart type de l'échantillon de 100 bouteilles. Arrondir l'écart type à 10^{-2}.**

Volume (cL)	73	74	75	76	77
Effectif	17	20	43	13	7

La moyenne pondérée est $\bar{x} = 74{,}73$ cL. L'écart type de la série, calculé avec les 100 bouteilles, est $\sqrt{121{,}71/100} \approx 1{,}1032$ cL, soit 1,10 cL au centième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Moyenne : 74,73 cL ; écart type : 1,10 cL.

Question 2.a. **Sous l'hypothèse H_0 : μ = 75, la moyenne Z des volumes mesurés suit une loi normale d'espérance 75 et d'écart type 0,11. Déterminer h tel que P(75 - h ≤ Z ≤ 75 + h) soit égal à 0,95, à 10^{-2} près.**

Pour une loi normale, l'intervalle central de probabilité 0,95 correspond à l'intervalle centré réduit $[-1{,}96 ; 1{,}96]$. L'écart type de Z sous H_0 étant 0,11, on obtient $h = 1{,}96 \times 0{,}11 = 0{,}2156$ cL, soit 0,22 cL au centième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$h \approx 0{,}22$ cL.

Question 2.b. Énoncer la règle de décision du test bilatéral au seuil de confiance de 95 % pour tester H_0 : $\mu = 75$ contre H_1 : $\mu \neq 75$.

Au seuil de 5 %, la région de non-rejet est l'intervalle central déterminé à la question précédente. On compare la moyenne observée à cet intervalle :

- Si elle appartient à $[75 - h ; 75 + h]$, on ne rejette pas H_0.
- Si elle est à l'extérieur, on rejette H_0.

Avec $h \approx 0{,}22$, l'intervalle est approximativement $[74{,}78 ; 75{,}22]$ cL.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Ne pas rejeter H_0 si la moyenne est dans $[74{,}78 ; 75{,}22]$ cL ; la rejeter sinon.

Question 2.c. À partir des résultats de l'échantillon, déterminer si l'hypothèse H_0 : $\mu = 75$ peut être acceptée.

La moyenne de l'échantillon est 74,73 cL. Elle est inférieure à la borne basse, environ 74,78 cL, de l'intervalle de non-rejet obtenu à la question précédente. Elle se situe donc dans la région de rejet du test bilatéral au seuil de 5 %.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non : on rejette H_0, car 74,73 n'appartient pas à $[74{,}78 ; 75{,}22]$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS Groupement D1, session 2022, code 22-MATGRD1, durée de deux heures. Le coefficient varie selon la spécialité : 1, 2 ou 1,5. Les deux exercices de 10 points étudient la modélisation de l'équipement en implants médicaux, puis les probabilités de panne et le contrôle statistique du volume d'eau d'une machine à embouteiller. Les compétences mobilisées incluent calcul, interprétation et décision.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Le changement y = ln(N - 30) transforme le modèle exponentiel en relation affine, ajustable par une droite y = ak + b.
- Pour y' + ay = b, la solution générale s'obtient en ajoutant une solution constante de l'équation à la solution de l'équation homogène.
- Sur n jours indépendants avec une probabilité de panne p, le nombre de pannes suit une loi binomiale B(n,p) ; l'approximation de Poisson utilise λ = np.
- Dans un test bilatéral à 95 %, l'intervalle de décision est centré sur la valeur moyenne prévue par H_0 et contient 95 % des valeurs sous cette hypothèse.

Points de vigilance & attentes du jury

- Pour le modèle de l'implant, respecter l'unité en milliers et compter le temps depuis 2013.
- Appliquer les arrondis demandés : millième pour le tableau transformé, centième pour les coefficients et précision indiquée pour les probabilités.
- Pour un défaut d'approvisionnement, identifier l'union des événements et utiliser leur indépendance lorsque nécessaire.
- Pour le test, calculer la moyenne observée puis la comparer aux bornes de décision avant de conclure.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment retrouver le modèle exponentiel à partir des données transformées ?

Calculer y = ln(N - 30) pour chaque rang, puis ajuster y par une droite y = ak + b. En exponentiant, on obtient N = 30 + e^b e^(ak), avec les coefficients arrondis selon la consigne.

Q : Comment déterminer le paramètre de l'approximation de Poisson ?

Le nombre de pannes suit d'abord une loi binomiale de paramètres n et p. Pour l'approximation de Poisson, on prend λ = np ; ici, 200 × 0,025 donne un paramètre égal à 5.

Q : Comment répartir le temps dans cette épreuve de deux heures ?

Les deux exercices valent chacun 10 points. Répartissez le temps entre eux, avancez les calculs accessibles, puis gardez une marge pour la calculatrice, les arrondis, les unités et la vérification des conclusions.

Q : Comment conclure le test bilatéral demandé dans le sujet ?

Établissez les bornes associées à la probabilité centrale de 95 %, puis comparez-y la moyenne de l'échantillon. Appliquez la règle de décision annoncée pour dire si l'hypothèse H_0 peut être acceptée.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsmmcm.fr/assets/annales/bts-mmcm/E2 - Mathématiques/2022/BTS MMCM - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 3-Sujet.pdf

Ressources BTS Maintenance des Matériels de Construction et de Manutention : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.