Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction (12 questions) **Page 3**

2. Série de Fourier d'une fonction paire périodique (10 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btsmmcm.fr/assets/annales/bts-mmcm/E2 - Mathématiques/2023/BTS MMCM - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

1. Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

La distance entre le fond du tiroir et le fond du meuble est modélisée par une fonction f du temps, exprimée en centimètres. L'exercice étudie la fermeture par une équation différentielle, puis par l'analyse de la fonction, un algorithme et le calcul d'une position moyenne.

Partie A

Question 1.a. Résoudre l'équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

On calcule le discriminant : $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$. Il est positif, donc l'équation possède deux racines réelles distinctes. La formule du second degré donne $r = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2}$. On obtient ainsi les deux valeurs recherchées.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $r_1 = -1$ et $r_2 = -4$.

Question 1.b. À l'aide du tableau fourni, résoudre l'équation différentielle y'' + 5y' + 4y = 0.

1. L'équation caractéristique associée à $y'' + 5y' + 4y = 0$ est $r^2 + 5r + 4 = 0$, dont les racines sont -1 et -4.
2. Le tableau fourni indique qu'à deux racines réelles distinctes correspondent deux exponentielles associées. Aucune condition initiale n'étant imposée dans cette question, leurs coefficients restent arbitraires.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Question 2.a. À partir de la distance initiale de 20 cm et de la vitesse initiale négative de -10 cm·s⁻¹, déterminer f(0) et f'(0).

La distance entre O et M à l'instant initial est la valeur de la fonction en $t = 0$. La vitesse de déplacement correspond à sa dérivée. Le signe négatif indique que la distance diminue lorsque le tiroir se rapproche de O.

Grandeur initiale	Valeur
Distance OM	$f(0) = 20$ cm
Vitesse	$f'(0) = -10$ cm·s^{-1}

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10$ cm·s^{-1}.

Question 2.b. **En utilisant l'expression de f admise dans le sujet, déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.**

On remplace t par 2 dans l'expression admise de la distance. Le premier terme devient $\frac{70}{3}e^{-2}$, et le second $\frac{10}{3}e^{-8}$. Leur différence donne la distance exacte en centimètres, sans arrondir les exponentielles.

$$f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}.$$

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$OM = f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$ cm.

Question 2.c. **Le tiroir est considéré fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Déterminer si l'affirmation du constructeur, selon laquelle le tiroir est fermé en moins de 4 secondes, est juste et justifier.**

Pour vérifier l'affirmation, on peut évaluer la distance à un instant inférieur à 4 s. La fonction est décroissante, car $f'(t) = \frac{-70e^{-t}+40e^{-4t}}{3} < 0$ pour $t \geq 0$: $e^{-4t} \leq e^{-t}$. On calcule alors :

- $f(3,9) \approx 0,4723$ cm ;
- $0,4723 < 0,5$, donc le seuil est atteint avant 4 s.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Oui, le constructeur a raison : le tiroir est fermé à 3,9 s, donc en moins de 4 s.

Partie B

Question 1.a. **À partir de la limite rappelée pour l'exponentielle, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.**

Quand t tend vers $+\infty$, les exposants $-t$ et $-4t$ tendent vers $-\infty$. Ainsi, $e^{-t} \to 0$ et $e^{-4t} \to 0$. Comme $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$, chacun de ses deux termes tend vers zéro, et donc leur différence tend également vers zéro.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0.$

Question 1.b. **En déduire que la courbe représentative de f possède une asymptote et en donner une équation.**

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ est finie. La courbe représentative admet donc une asymptote horizontale d'ordonnée égale à cette limite. Comme la limite vaut zéro, la droite asymptote est l'axe des abscisses.

Équation de l'asymptote : $y = 0$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 0$.

Question 2.a. **Déterminer l'expression de f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.**

On dérive chaque terme en utilisant $(e^{u(t)})' = u'(t)e^{u(t)}$. Pour le premier terme, la dérivée de e^{-t} est $-e^{-t}$. Pour le second, le coefficient négatif et la dérivée de $-4t$ donnent un terme positif :

$$f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}.$$

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2.b. **Sachant que f'(t) est négative sur [0 ; +∞[, établir le tableau de variations de f sur cet intervalle.**

On sait que $f'(t) < 0$ sur $[0; +\infty[$, donc f est strictement décroissante. À l'origine, $f(0) = \frac{70}{3} - \frac{10}{3} = 20$, et sa limite en $+\infty$ est nulle.

t	**0**		$+\infty$
Signe de $f'(t)$		$-$	
Variation de f	20	↘	0

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> f décroît strictement de 20 vers 0 sur $[0; +\infty[$.

Question 3.a. **Compléter le tableau de l'algorithme à partir de la ligne 36, en ajoutant les lignes nécessaires jusqu'à son arrêt. Indiquer les valeurs de t, f(t) arrondie au centième et le résultat du test de la condition.**

À chaque passage, l'algorithme augmente t de 0,1. Il s'arrête dès que le test $f(t) > 0,5$ devient faux. Les valeurs de $f(t)$ ci-dessous sont arrondies au centième ; le test porte sur la valeur non arrondie.

Ligne	t	$f(t)$, au centième	Test $f(t) > 0,5$
36	3,6	0,64	VRAIE
37	3,7	0,58	VRAIE
38	3,8	0,52	VRAIE
39	3,9	0,47	FAUSSE

✓ RÉPONSE À RETENIR

L'algorithme s'arrête à la ligne 39, avec $t = 3,9$ s.

Question 3.b. Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

1. À $t = 3,8$, $f(t) \approx 0,52 > 0,5$: le test reste vrai et l'algorithme ajoute 0,1.
2. À $t = 3,9$, $f(t) \approx 0,47 < 0,5$: le test devient faux et la boucle s'arrête.

La valeur finale de t correspond au premier dixième de seconde testé où la distance est inférieure au seuil.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$t = 3,9$ s : la distance est inférieure à 0,5 cm.

Question 4. La position moyenne m du tiroir sur [0 ; 4] étant définie par m = (1/4)∫₀⁴ f(t)dt, démontrer l'expression de m donnée dans le sujet.

Une primitive de $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$ est $F(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{-4t}$. On applique le théorème fondamental de l'analyse aux bornes 0 et 4, puis on divise l'intégrale par 4, conformément à la définition de la moyenne.

$$m = \frac{1}{4}\left[-\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{-4t}\right]_0^4 = \frac{45}{8} - \frac{35}{6}e^{-4} + \frac{5}{24}e^{-16}.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$m = \frac{45}{8} - \frac{35}{6}e^{-4} + \frac{5}{24}e^{-16}$ cm.

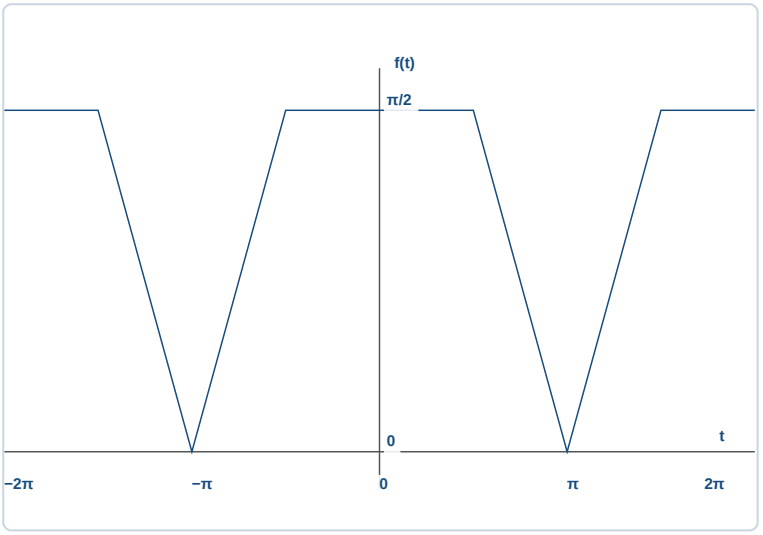
2. Série de Fourier d'une fonction paire périodique

L'exercice porte sur une fonction paire de période 2π, définie par morceaux sur [0 ; π] puis prolongée par périodicité. Il demande de tracer sa représentation, d'étudier ses coefficients de Fourier, de comparer des courbes et d'évaluer l'erreur d'une approximation de sa valeur efficace.

Question 1. Sur le document-réponse, tracer la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle [-2π ; 2π].

La fonction est paire et de période 2π. Sur chaque période, elle vaut $\pi/2$ de $-\pi/2$ à $\pi/2$, puis rejoint linéairement 0 en $t = \pm\pi$. Le tracé répète ce motif sur $[-2\pi; 2\pi]$.

Représentation de f sur [-2π ; 2π]



> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Tracé de f sur $[-2\pi; 2\pi]$: voir le graphique.

Question 2. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le coefficient de Fourier b_n est nul.

La fonction f est paire, tandis que $t \mapsto \sin(nt)$ est impaire. Leur produit est donc impair. Sur une période centrée en 0 :

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = 0,$$

car l'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique est nulle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour tout entier $n \geq 1$, $b_n = 0$.

Question 3. Déterminer la pulsation ω associée à la fonction f.

La pulsation associée à une période T vaut $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Avec $T = 2\pi$, on obtient $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$\omega = 1$ rad par unité de temps.

Question 4. Démontrer que le coefficient a_0 est égal à $3\pi/8$.

Par la formule du formulaire, $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt$. La période comprend deux fois le motif défini sur $[0;\pi]$:

$$\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 2\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\,dt\right) = \frac{3\pi^2}{4}.$$

Ainsi, $a_0 = \frac{3\pi}{8}$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$a_0 = \frac{3\pi}{8}$.

Question 5. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le coefficient a_n est donné par l'expression intégrale indiquée dans le sujet.

Comme f est paire, le formulaire donne $a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,dt$. En prenant $T = 2\pi$, $\omega = 1$, puis en séparant aux bornes de la définition de f :

$$a_n = \int_0^{\pi/2}\cos(nt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\cos(nt)\,dt.$$

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$a_n = \int_0^{\pi/2}\cos(nt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\cos(nt)\,dt$, pour $n \geq 1$.

Question 6. À partir de l'expression de a_n admise dans le sujet, déterminer les valeurs exactes de a_1, a_2 et a_3.

Dans $a_n = \frac{2}{\pi n^2}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos(n\pi)\right)$, on substitue successivement $n = 1, 2, 3$. On obtient les coefficients demandés :

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$a_1 = \frac{2}{\pi}$, $\quad a_2 = -\frac{1}{\pi}$, $\quad a_3 = \frac{2}{9\pi}$.

Question 7. **Déduire des coefficients précédents l'expression de la somme partielle $s_3(t)$ indiquée dans le sujet.**

La somme partielle s'écrit $s_3(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{3} a_n \cos(nt)$, puisque les coefficients b_n sont nuls. En remplaçant par les valeurs obtenues précédemment :

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $s_3(t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{1}{\pi}\cos(2t) + \frac{2}{9\pi}\cos(3t)$.

Question 8. **Indiquer, sans justification, laquelle des trois courbes proposées représente la fonction s_3.**

La courbe de s_3 est paire, périodique, presque horizontale autour de $t = 0$, avec des creux près de $t = \pm\pi$. Cela correspond à la courbe numéro 3.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Courbe numéro 3.

Question 9.a. **Pour $P = (a_0)^2 + 1/2[(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2]$, donner une valeur approchée de P à 10^{-4} près.**

En utilisant les coefficients calculés :

$$P = \left(\frac{3\pi}{8}\right)^2 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2}{9\pi}\right)^2\right] \approx 1{,}6437.$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P \approx 1{,}6437$.

Question 9.b. **La valeur efficace F vérifie $F^2 = \pi^2/6$ et P constitue une approximation de F^2. Choisir, parmi 0,1 %, 1 % et 10 %, le pourcentage d'erreur de cette approximation. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.**

Avec $F^2 = \frac{\pi^2}{6}$, l'erreur relative de l'approximation est $\frac{|P - F^2|}{F^2} \times 100 \approx 0{,}074\%$. Parmi les choix proposés, la valeur la plus proche est $0{,}1\%$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pourcentage d'erreur : $0{,}1\%$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, session 2023, porte le code 23MATGRB2 et dure 2 heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Les deux exercices, notés chacun sur 10 points, étudient la fermeture d'un tiroir et les séries de Fourier, en mobilisant équations différentielles, analyse de fonction, algorithmique et calcul de coefficients.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour une équation différentielle linéaire à coefficients constants, résoudre d'abord l'équation caractéristique associée.
- Une limite finie de f(t) en +∞ donne une asymptote horizontale à la courbe représentative.
- Pour une fonction paire, les coefficients sinus b_n sont nuls et les coefficients cosinus se calculent avec la formule adaptée.
- La position moyenne sur [0 ; 4] est $m = (1/4)\int_0^4 f(t)dt$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les conditions initiales et distinguer la distance f(0) de la vitesse f'(0), en tenant compte de son signe.
- Justifier la fermeture du tiroir en comparant la distance au seuil de 0,5 cm au temps considéré.
- Suivre chaque itération de l'algorithme et évaluer sa condition avec les valeurs non arrondies.
- Pour le QCM final, choisir une seule réponse ; une réponse fausse ou multiple ne rapporte ni ne retire de point.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle du premier exercice ?

On résout d'abord l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$. Ses racines déterminent les exponentielles de la solution générale, puis les conditions initiales permettent de fixer les constantes.

Q : Pourquoi les coefficients b_n sont-ils nuls dans l'exercice sur Fourier ?

La fonction f est paire et sin(nωt) est impaire. Leur produit est impair, donc son intégrale sur une période centrée en zéro est nulle, ce qui donne $b_n = 0$ pour tout n supérieur ou égal à 1.

Q : Comment organiser les deux heures d'épreuve ?

Les deux exercices valent chacun 10 points et les parties de l'exercice 1 peuvent être traitées indépendamment. Répartissez le temps entre les deux thèmes, puis gardez une marge pour vérifier calculs, unités et réponses reportées.

Q : Quelles précautions prendre pour les arrondis et la notation ?

Conservez les valeurs exactes pendant les calculs et arrondissez seulement lorsque le sujet le demande. La valeur de f(t) dans le tableau est arrondie au centième, tandis que P est demandé à 10^{-4} près.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsmmcm.fr/assets/annales/bts-mmcm/E2 - Mathématiques/2023/BTS MMCM - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS Maintenance des Matériels de Construction et de Manutention : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.