Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRD1** • Durée : **Non indiquée sur les pages fournies**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Refroidissement de l'eau d'un spa (12 questions) **Page 3**

2. Contrôle qualité et commercialisation d'une farine (12 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsmmcm.fr/assets/annales/bts-mmcm/E2 - Mathématiques/2023/BTS MMCM - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 3-Sujet.pdf

1. Refroidissement de l’eau d’un spa

Pour vérifier l’isolation thermique d’un spa, on modélise par une fonction la température de l’eau après la coupure du chauffage, à partir de 38 °C, alors que la température extérieure reste à 25 °C. Les questions portent sur une équation différentielle, l’étude de la fonction obtenue et un algorithme simulant le franchissement d’un seuil de température.

Partie A

Question 1. Déterminer les solutions de l’équation différentielle y’ + 0,05y = 0 sur l’intervalle [0 ; +∞[.

L’équation homogène s’écrit $y' = -0,05y$. Une fonction exponentielle de la forme Ce^{at} convient lorsque $a = -0,05$. En effet, sa dérivée est $-0,05Ce^{-0,05t}$, donc elle vérifie l’équation pour toute constante réelle C. On obtient ainsi toutes les solutions sur l’intervalle demandé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0,05t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer une fonction constante solution particulière de l’équation différentielle y’ + 0,05y = 1,25 sur [0 ; +∞[.

On cherche une solution constante $y(t) = k$, donc $y'(t) = 0$. En remplaçant dans l’équation $y' + 0,05y = 1,25$, on obtient $0,05k = 1,25$. Ainsi, $k = 1,25/0,05 = 25$. La fonction constante de valeur 25 est donc une solution particulière sur $[0; +\infty[$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Une solution particulière constante est $y(t) = 25$.

Question 3. En déduire les solutions de l’équation différentielle y’ + 0,05y = 1,25.

Les solutions de l’équation complète s’obtiennent en ajoutant une solution particulière aux solutions de l’équation homogène associée. La solution particulière constante vaut 25 et la famille homogène est $Ce^{-0,05t}$. Par conséquent, toutes les solutions de $y' + 0,05y = 1,25$ sont de cette forme, où C est une constante réelle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0,05t} + 25$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 4. Montrer que, pour tout réel t de [0 ; +∞[, f(t) = 13e$^{-0,05t}$ + 25.

La solution générale est $f(t) = Ce^{-0,05t} + 25$. La condition initiale $f(0) = 38$ donne $C + 25 = 38$, puisque $e^0 = 1$. On trouve donc $C = 13$. En remplaçant la constante dans la solution générale, on obtient bien l’expression demandée pour tout $t \geq 0$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 13e^{-0,05t} + 25$.

Partie B

Question 1. Calculer f(24), arrondie au dixième, puis interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

On utilise le modèle obtenu et on remplace t par 24 : $f(24) = 13e^{-0,05\times 24} + 25 \approx 28,9155$. Arrondie au dixième, la température vaut 28,9 °C. Cette valeur représente la température de l'eau du spa 24 heures après la coupure de son alimentation électrique.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Après 24 h, la température de l'eau est d'environ $28,9\ ^\circ\text{C}$.

Question 2.a. Pour tout réel t de [0 ; +∞[, déterminer une expression de f'(t).

La dérivée de $e^{u(t)}$ est $u'(t)e^{u(t)}$. Ici, $u(t) = -0,05t$, donc $u'(t) = -0,05$. En dérivant le terme constant 25, dont la dérivée est nulle, on obtient $f'(t) = 13 \times (-0,05)e^{-0,05t}$. Cette expression vaut pour tout $t \geq 0$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f'(t) = -0,65e^{-0,05t}$.

Question 2.b. Déduire le sens de variation de f sur [0 ; +∞[et argumenter sur la cohérence de ce résultat avec le contexte de l'exercice.

Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle $e^{-0,05t}$ est strictement positive. Le signe de la dérivée est donc celui de son coefficient négatif :

- $f'(t) = -0,65e^{-0,05t} < 0$;
- f est strictement décroissante.

C'est cohérent : après l'arrêt du chauffage, l'eau refroidit vers la température extérieure.

✓ RÉPONSE À RETENIR

f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$, conformément au refroidissement de l'eau.

Question 3.a. Déterminer la limite de f en +∞.

Lorsque t tend vers $+\infty$, l'exposant $-0,05t$ tend vers $-\infty$. Ainsi, $e^{-0,05t}$ tend vers 0, et le terme $13e^{-0,05t}$ tend également vers 0. La fonction $f(t) = 13e^{-0,05t} + 25$ tend donc vers 25.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim_{t \to +\infty} f(t) = 25.$

Question 3.b. Interpréter la valeur de cette limite dans le contexte de l'exercice.

La limite représente la température vers laquelle l'eau se rapproche après une très longue durée sans chauffage. Le modèle prévoit que cette température se stabilise à 25 °C, valeur égale à la température ambiante extérieure du spa. L'eau ne refroidit donc pas indéfiniment selon ce modèle.

✓ RÉPONSE À RETENIR

À long terme, l'eau se rapproche de la température ambiante : $25\ °\mathrm{C}$.

Question 4.a. Une alarme sonne lorsque la température devient strictement inférieure à la température programmée. Pour une programmation à 36 °C, déterminer par le calcul le temps écoulé depuis la coupure lorsque l'alarme retentit. Donner la durée exacte puis sa valeur arrondie à la minute.

Au seuil de 36 °C, on résout $13e^{-0{,}05t} + 25 = 36$. Donc $e^{-0{,}05t} = 11/13$, puis $t = 20\ln(13/11)$ heures. Cette durée vaut environ 3,341 h, soit 200,465 minutes. L'alarme retentit juste après le franchissement, lorsque la température devient strictement inférieure à 36 °C.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Durée exacte : $20\ln(13/11)$ h. À la minute près : 3 h 20 min.

Question 4.b. Déterminer la valeur numérique affichée par l'algorithme donné, qui augmente H d'une heure et actualise T = 13e$^{-0,05H}$ + 25 tant que T ≥ 34.

L'algorithme augmente H d'une heure tant que la température calculée reste supérieure ou égale à 34 °C. À $H = 7$, $T \approx 34,161$, donc la boucle continue. À $H = 8$, $T \approx 33,714 < 34$, donc elle s'arrête et affiche la valeur de H.

✓ RÉPONSE À RETENIR

L'algorithme affiche 8.

Question 4.c. Expliquer ce que l'algorithme permet de déterminer dans le contexte de l'exercice.

À chaque passage dans la boucle, l'algorithme avance d'une heure et calcule la température correspondante. Il s'arrête dès que cette température devient strictement inférieure à 34 °C. Il détermine donc le premier nombre entier d'heures après la coupure pour lequel le seuil est franchi.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Il détermine le premier nombre entier d’heures où l’eau passe sous 34 °C : 8 h.

2. Contrôle qualité et commercialisation d’une farine

Une minoterie contrôle l’extensibilité de pâtes fabriquées avec le blé livré et le taux d’humidité de lots mélangés, puis étudie le poids des sacs de farine. L’exercice examine aussi les probabilités qu’artisans boulangers et boulangers industriels testent une nouvelle farine, ainsi que le nombre de clients concernés parmi 200 personnes.

Partie A

Question 1.a. À partir des cinq indices d’extensibilité mesurés, calculer la moyenne de la série et son écart-type arrondi au centième.

Mesure	Calcul	Résultat
Moyenne	$(104 + 81 + 83 + 57 + 55)/5$	76 mm
Écart-type	$\sqrt{[(104-76)^2 + (81-76)^2 + (83-76)^2 + (57-76)^2 + (55-76)^2]/5}$	18,22 mm

L’écart-type de la série est la racine carrée de la moyenne des carrés des écarts à la moyenne. Les cinq mesures sont celles du tableau original, en millimètres. On obtient une moyenne de 76 mm, puis un écart-type de $\sqrt{332}$ mm, arrondi au centième.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Moyenne : 76 mm ; écart-type : 18,22 mm.

Question 1.b. En considérant que l’écart-type est σ = 18 mm, vérifier qu’aucune valeur de la série ne se trouve en dehors de l’intervalle [x̄ − 2σ ; x̄ + 2σ]. Conclure si le technicien doit tester cinq nouveaux échantillons.

Le centre de l’intervalle est la moyenne calculée précédemment, $\bar{x} = 76$ mm. Avec $\sigma = 18$ mm, ses bornes sont $76 - 2 \times 18 = 40$ mm et $76 + 2 \times 18 = 112$ mm. Les valeurs mesurées, 104, 81, 83, 57 et 55 mm, sont toutes comprises entre ces bornes. Aucune mesure n’est donc à l’extérieur de l’intervalle exigé par le processus qualité.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Aucune valeur n’est hors de [40 ; 112] mm : aucun nouveau test n’est nécessaire.

Question 2. À partir des masses et des taux d’humidité des deux camions, montrer que le technicien peut autoriser leur déchargement dans un même silo, sachant que le taux d’humidité exigé dans un silo est inférieur à 13 %.

Camion	Masse de blé (kg)	Humidité	Masse d’eau (kg)
Premier	29 540	12,4 %	3 662,96
Second	14 540	14,1 %	2 050,14
Total	44 080		5 713,10

Le taux du mélange se calcule en divisant la masse totale d'eau par la masse totale de blé, puis en multipliant par 100. Le résultat est inférieur à 13 %, la limite fixée au cahier des charges. Le technicien peut donc autoriser le déchargement dans le même silo vide.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Humidité du mélange : environ 12,961 %. Déchargement dans le même silo autorisé.

Partie B

Question 1. Le poids X d'un sac suit une loi normale de moyenne 25,2 kg et d'écart-type 0,1 kg. Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'un sac ait une masse inférieure à 25 kg.

La masse du sac suit une loi normale de moyenne 25,2 kg et d'écart-type 0,1 kg. On centre et réduit : $Z = (X - 25,2)/0,1$, qui suit la loi normale centrée réduite. Pour la limite de 25 kg, le score réduit vaut $(25 - 25,2)/0,1 = -2$. La probabilité recherchée est donc celle d'obtenir une valeur inférieure à -2, soit environ 0,0228, arrondie au millième.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(X < 25) \approx 0,023$.

Question 2.a. Déterminer un réel h tel que P(25,2 − h ≤ X ≤ 25,2 + h) soit approximativement égal à 0,95, à 10^{-2} près.

Pour une loi normale, l'intervalle centré sur la moyenne qui contient environ 95 % des valeurs s'étend à environ 1,96 écart-type de chaque côté. Ici, l'écart-type vaut 0,1 kg. Ainsi, $h \approx 1,96 \times 0,1 = 0,196$ kg. Arrondi au centième de kilogramme, cela donne 0,20 kg, ce qui satisfait la précision demandée.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $h = 0,20$ kg au centième près.

Question 2.b. À partir de la représentation graphique fournie, expliquer pourquoi la courbe ne peut pas représenter la fonction de densité de la variable aléatoire X.

La variable X a une moyenne de 25,2 kg et un écart-type de 0,1 kg. Pour une loi normale, environ 95 % des masses devraient donc se trouver dans un intervalle de largeur proche de 0,392 kg, entre 25,004 kg et 25,396 kg. Or la courbe fournie s'étale sur plusieurs kilogrammes autour de 25,2 kg. Cette dispersion graphique est incompatible avec l'écart-type annoncé et ne peut représenter la densité de X.

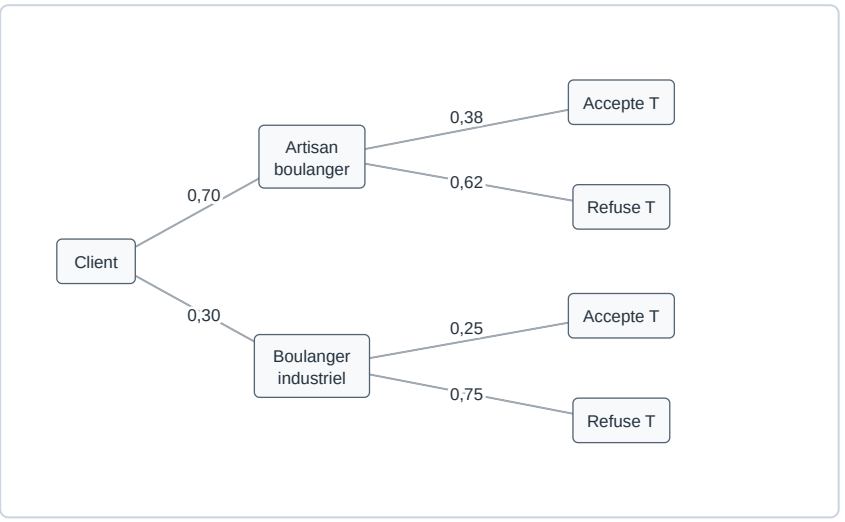
> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La courbe est trop étalée : 95 % des masses devraient être entre 25,004 kg et 25,396 kg.

Partie C

Question 1. Représenter la situation décrite par un arbre pondéré, en indiquant les catégories de clients et leur acceptation de tester la farine La Romaine.

On note A l'événement « le client est artisan boulanger » et T l'événement « le client accepte de tester La Romaine ». Les proportions données déterminent les deux premières branches. Pour chaque catégorie, la probabilité de refus est le complément de celle d'accepter. L'arbre ci-dessous distingue donc les artisans des boulangers industriels, puis les clients qui acceptent ou refusent le test.

Arbre pondéré des clients et du test de La Romaine



Les probabilités de seconde étape sont conditionnelles à la catégorie du client.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A) = 0,70$, $P(\overline{A}) = 0,30$; $P_A(T) = 0,38$, $P_A(\overline{T}) = 0,62$; $P_{\overline{A}}(T) = 0,25$, $P_{\overline{A}}(\overline{T}) = 0,75$.

Question 2.a. Calculer la probabilité que le client soit un artisan boulanger et accepte de tester la farine La Romaine.

L'événement demandé correspond au chemin de l'arbre où le client est artisan boulanger puis accepte de tester la farine. La probabilité de ce chemin s'obtient en multipliant la probabilité d'être artisan par la probabilité conditionnelle d'accepter parmi les artisans. On calcule donc $0,70 \times 0,38 = 0,266$. Cette probabilité concerne l'ensemble des clients tirés au hasard, et non uniquement les artisans.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A \cap T) = 0,266$.

Question 2.b. **Montrer que la probabilité qu'un client accepte de tester la farine La Romaine est égale à 0,341.**

Les deux catégories de clients sont disjointes et couvrent tous les clients. La probabilité d'accepter se calcule donc en additionnant les probabilités des deux chemins qui aboutissent à une acceptation : $P(T) = P(A)P_A(T) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(T)$. Avec les données de l'énoncé, cela donne $0,70 \times 0,38 + 0,30 \times 0,25 = 0,341$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T) = 0,341$.

Question 3. **Sachant qu'un client a testé la farine La Romaine, calculer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il soit un artisan boulanger.**

On cherche la probabilité qu'un client soit artisan sachant qu'il a accepté le test. Par définition, $P(A \mid T) = P(A \cap T)/P(T)$. La probabilité d'être artisan et d'accepter vaut 0,266, et la probabilité totale d'accepter vaut 0,341. Ainsi, $P(A \mid T) = 0,266/0,341 \approx 0,780058$, soit 0,780 au millième près.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(A \mid T) \approx 0,780$.

Question 4.a. **La variable aléatoire Y suit une loi binomiale de paramètres n = 200 et p = 0,341. Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'au plus 60 des 200 clients choisis aient testé la farine La Romaine.**

« Au plus 60 » signifie que $Y \leq 60$. Pour la loi binomiale de paramètres 200 et 0,341, on additionne les probabilités $P(Y = k) = \binom{200}{k}(0,341)^k(0,659)^{200-k}$ pour les entiers k de 0 à 60. Cette somme donne environ 0,125 au millième près. La probabilité demandée est donc voisine de 12,5 %.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(Y \leq 60) \approx 0,125$.

Question 4.b. **Calculer l'espérance de Y et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.**

Pour une loi binomiale de paramètres n et p, l'espérance est $E(Y) = np$. En remplaçant par les valeurs de l'énoncé, on obtient $E(Y) = 200 \times 0,341 = 68,2$. L'espérance décrit la moyenne attendue sur un grand nombre d'échantillons de 200 clients : environ 68 clients par échantillon auront testé la farine La Romaine.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(Y) = 68,2$ clients en moyenne sur 200.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, session 2023, porte le code 23MATGRD1. Elle étudie le refroidissement de l'eau d'un spa et des opérations de contrôle et de commercialisation dans une minoterie. Les compétences évaluées comprennent équations différentielles, étude de fonctions, algorithme, statistiques descriptives, lois normale et binomiale, arbres pondérés et probabilités conditionnelles. La durée et le coefficient ne sont pas indiqués sur les pages fournies.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = b, une solution particulière constante vaut b/a; la solution générale s'obtient en lui ajoutant la solution de l'équation homogène.
- Pour deux lots mélangés, le taux global est une moyenne pondérée par les masses, et non la moyenne simple des taux.
- Pour une loi binomiale B(n,p), l'espérance vaut np et P(Y ≤ k) cumule les probabilités de toutes les valeurs jusqu'à k.
- La probabilité conditionnelle de A sachant T est P(A ∩ T) / P(T), si P(T) est non nulle.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités et l'arrondi demandé, notamment convertir une durée exprimée en heures en minutes si nécessaire.
- Pour le contrôle qualité, tester chaque valeur contre l'intervalle donné, bornes incluses.
- Dans un arbre pondéré, distinguer les probabilités des branches et vérifier que les probabilités issues d'un même nœud totalisent 1.
- Pour la loi binomiale, préciser n et p et ne pas confondre « au plus 60 » avec exactement 60.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle du modèle de température ?

On résout d'abord l'équation homogène, puis on cherche une solution constante de l'équation complète. La solution générale est la somme de ces solutions; la condition initiale f(0) = 38 fixe la constante.

Q : Comment calculer le taux d'humidité après le mélange des deux livraisons ?

On pondère chaque taux par la masse correspondante, puis on divise la somme des masses d'eau par la masse totale. Il faut comparer le résultat au seuil strict de 13 % fixé par le cahier des charges.

Q : La durée et le coefficient de l'épreuve sont-ils précisés dans les pages fournies ?

Non. Les pages transmises ne donnent ni la durée officielle ni le coefficient. Elles indiquent toutefois que l'exercice 2 vaut 10 points; répartissez le temps entre les questions et gardez une marge pour vérifier calculs, unités et arrondis.

Q : Quelles démarches présenter pour les questions de probabilité ?

Nommez les événements ou la loi utilisés, indiquez les paramètres utiles et présentez le calcul. Donnez le résultat avec l'arrondi demandé et interprétez-le lorsque la consigne le demande.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsmmcm.fr/assets/annales/bts-mmcm/E2 - Mathématiques/2023/BTS MMCM - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 3-Sujet.pdf
Ressources BTS Maintenance des Matériels de Construction et de Manutention : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.